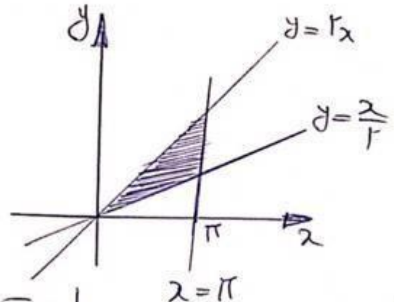
پاسخ تشریحی کوییز شماره ی ۲۵

ریاضی عمومی ۱و۲

استاد شکرزاد

تست ۱

(۲)



ناحیه y منظم است

$$I=\int_0^{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\sin y\,dy\,dx$$

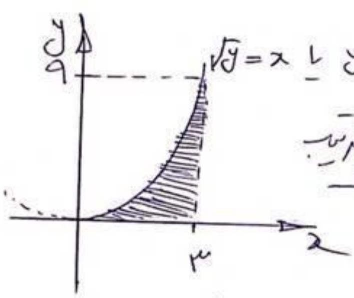
$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}-\cos y\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos 2x\right)dx$$

$$\Rightarrow I=2\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=2$$

تست ۲

(۴)



$$\xrightarrow{\text{تعویض ترتیب}} I=\int_0^{3}\int_0^{x^2}\sin(\pi x^3)\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{3}x^2\sin(\pi x^3)\,dx=\frac{-1}{3\pi}\cos\pi x^3\Big|_0^{3}=\frac{1}{3\pi}(1+1)=\frac{2}{3\pi}$$

تست ۳

(۳)

با کمک روش تغییر متغیر داریم:

$$\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow J=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{y}{x}}=\frac{1}{2v}$$

$$1\leqslant xy\leqslant 2\xrightarrow{u=xy}1\leqslant u\leqslant 2\quad \text{و}\quad 1\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 4\xrightarrow{v=\frac{y}{x}}1\leqslant v\leqslant 4$$

$$I=\int_1^{2}\int_1^{4}(\sqrt{u}+\sqrt{v})\frac{1}{2v}\,dv\,du=\int_1^{2}\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\ln|v|+\sqrt{v}\right)\Big|_1^{4}du$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{u}}{2}\ln 4 + 2 - \cancel{\frac{\sqrt{u}}{2}\ln 1}^{\,0} - 1 \right) dx = \frac{u^{3/2}}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\ln 4 + u \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\ln 4 + 1 = \frac{\sqrt{8}-1}{3}\ln 4 + 1$$

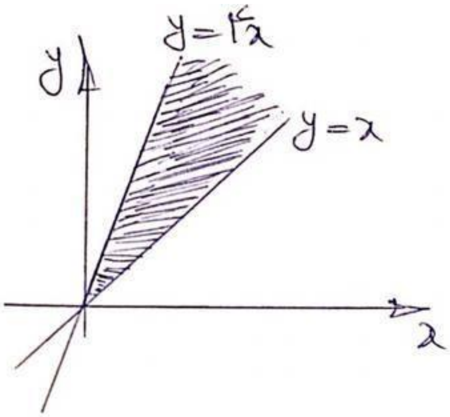
تست ۴

۴

از روش تبدیل قطبی استفاده می‌کنیم

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^{3/2}} = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\infty} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow I = (2\pi)\left(-(1+r^2)^{-1/2}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi$$



تست ۵

۲

$$\xrightarrow{\text{تعویض ترتیب انتگرال}} I = \int_0^{\infty}\int_{\frac{y}{4}}^{y} \frac{dx}{x(1+y^2)}\,dy$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+y^2}\Big|_{\frac{y}{4}}^{y}\,dy$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\ln y - \ln y/4}{1+y^2}\,dy = \int_0^{\infty} \frac{\ln 4}{1+y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow I = \ln 4\,(\tan^{-1} y)\Big|_0^{\infty} = \ln 4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \ln 2$$